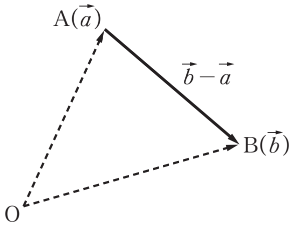
第 45 講　空間ベクトル(2)

【基礎確認事項】

［１］　空間の位置ベクトル

空間のベクトルについても，平面のベクトルと同様に位置ベクトルを考えることができる．以下にその概略を挙げておく．

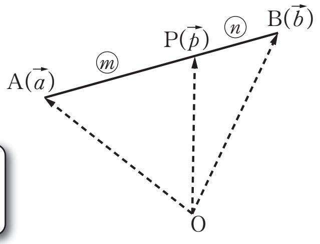


□位置ベクトルが $\vec{p}$ である点 P を $\mathbf{P}(\vec{p})$ と表す．

空間において，$A(\vec{a})$，$B(\vec{b})$ とすると，

$$\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a}$$

□線分 AB を $m:n$ に内分する点を $P(\vec{p})$ とすると



$$\vec{p}=\frac{n\vec{a}+m\vec{b}}{m+n}$$

とくに，線分 AB の中点を $M(\vec{m})$ とすると　$\vec{m}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$

□線分 AB を $m:n$ に外分する点を $Q(\vec{q})$ とすると

$$\vec{q}=\frac{-n\vec{a}+m\vec{b}}{m-n}$$

□$A(\vec{a})$，$B(\vec{b})$，$C(\vec{c})$ とすると，△ABC の重心 $G(\vec{g})$ は　$\vec{g}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$

⇒　C&U ①②

［２］　共面条件

□一直線上にない 3 点は，ただ 1 つの平面上に存在する．

ところが空間においては，一直線上にない 4 点が同一平面上にあるとは限らない．

□一般に一直線上にない 3 点 A，B，C に対し，点 P が平面 ABC 上にある条件は以下である．

共面条件

4 点 A，B，C，P が同一平面上にある

$\Longleftrightarrow$　$\overrightarrow{AP}=s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$　となる実数 s，t が存在

⇒　C&U ③

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

【CHECK & UP】

1　平行六面体ABCD-EFGHにおいて，線分CFを2：1に内分する点をP，線分APを3：1に内分する点をQとする．$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{d}$，$\overrightarrow{AE}=\vec{e}$とするとき，$\overrightarrow{AP}$，$\overrightarrow{AQ}$，$\overrightarrow{CQ}$を$\vec{b}$，$\vec{d}$，$\vec{e}$で表せ．

2　1辺の長さが1の正四面体OABCを考える．辺OA，OBの中点をそれぞれP，Qとし，辺OCを2：3に内分する点をRとする．また，△PQRの重心をGとする．

(1)　$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$とするとき，$\overrightarrow{OG}$を$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$を用いて表せ．

(2)　$\overrightarrow{OG}$の大きさ$|\overrightarrow{OG}|$を求めよ．

3　A(3, 1, 2)，B(4, 2, 3)，C(5, 2, 5)，D(-2, -1, x)が同一平面上にあるときxの値を求めよ．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第45講　空間ベクトル(2)

1　1辺の長さが1の立方体ABCD-EFGHにおいて，辺AB，CG，HEを$t:(1-t)$に内分する点をそれぞれP，Q，Rとし，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\vec{c}$とする．ただし，$0<t<1$とする．

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$，$\overrightarrow{\mathrm{PR}}$をそれぞれ$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$を用いて表せ．

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$と$\overrightarrow{\mathrm{PR}}$のなす角$\theta$を求めよ．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 [1]　3点A$(-1,\ -1,\ -1)$，B$(1,\ 2,\ 3)$，C$(x,\ y,\ 1)$が一直線上にあるとき，x，yの値を求めよ．

[2]　正四面体ABCDにおいて，△BCDの重心をGとする．ある実数kについて，$k\overrightarrow{\mathrm{PA}}=\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{PC}}+\overrightarrow{\mathrm{PD}}$を満たす点Pは，2点A，Gを通る直線上にあることを証明せよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　直方体 ABCD-EFGH において，辺 BF を 2：1 に内分する点を P，辺 FG を $t:(1-t)$ に内分する点を Q，辺 DH の中点を R とする．4 点 A，P，Q，R が同一平面上にあるとき，実数 t の値を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 45 講　空間ベクトル(2)

四面体 ABCD の辺 BC の中点を P，線分 PD の中点を Q，線分 AQ の中点を R とする．また，直線 BR と平面 ACD の交点を S とし，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{d}$ とする．

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AR}}=\dfrac{1}{\boxed{\text{ア}}}(\vec{b}+\vec{c}+\boxed{\text{イ}}\vec{d})$　である．

(2)　点 S は直線 BR 上にあるので，$\overrightarrow{\mathrm{BS}}=k\overrightarrow{\mathrm{BR}}$（$k$ は実数）とおくと，

$$\overrightarrow{\mathrm{AS}}=\left(1-\frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}k\right)\vec{b}+\frac{k}{\boxed{\text{オ}}}\vec{c}+\frac{k}{\boxed{\text{カ}}}\vec{d}\quad\cdots\cdots①$$ と表せる．

　また，点 S は平面 ACD 上にあるので，$\overrightarrow{\mathrm{AS}}=s\vec{c}+t\vec{d}$（$s$，$t$ は実数）　……②　とおける．

①，②より　$\overrightarrow{\mathrm{AS}}=\dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}\vec{c}+\dfrac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}\vec{d}$ である．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 45 講　空間ベクトル⑵

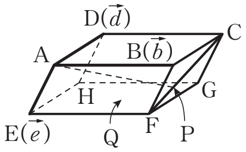
【CHECK & UP】

1

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\dfrac{1\overrightarrow{\mathrm{AC}}+2\overrightarrow{\mathrm{AF}}}{3}$

$=\dfrac{(\vec{b}+\vec{d})+2(\vec{b}+\vec{e})}{3}$

$=\boldsymbol{\dfrac{3\vec{b}+\vec{d}+2\vec{e}}{3}}$



ここでは空間における位置ベクトルの概念を利用し，「分点」の表現が中心となる．3 つの 1 次独立なベクトルのうち，2 つを利用することでその「2 つのベクトルが含まれる平面上のベクトル」を表すことができる．空間ベクトルの問題であっても局所的には平面上で考えることが多い．

$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{3\vec{b}+\vec{d}+2\vec{e}}{3}=\boldsymbol{\dfrac{3\vec{b}+\vec{d}+2\vec{e}}{4}}$

$\overrightarrow{\mathrm{CQ}}=\overrightarrow{\mathrm{AQ}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\dfrac{3\vec{b}+\vec{d}+2\vec{e}}{4}-(\vec{b}+\vec{d})=\boldsymbol{\dfrac{-\vec{b}-3\vec{d}+2\vec{e}}{4}}$

2

⑴　$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+\overrightarrow{\mathrm{QR}}}{3}=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{\vec{a}}{2}+\dfrac{\vec{b}}{2}+\dfrac{2}{5}\vec{c}\right)=\boldsymbol{\dfrac{1}{6}\vec{a}+\dfrac{1}{6}\vec{b}+\dfrac{2}{15}\vec{c}}$

⑵　$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$，　$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=1\times1\times\cos60^\circ=\dfrac{1}{2}$

よって　$|\overrightarrow{\mathrm{OG}}|^2=\left|\dfrac{1}{30}(5\vec{a}+5\vec{b}+4\vec{c})\right|^2$

$=\dfrac{1}{30^2}(25|\vec{a}|^2+25|\vec{b}|^2+16|\vec{c}|^2+50\vec{a}\cdot\vec{b}+40\vec{b}\cdot\vec{c}+40\vec{c}\cdot\vec{a})$

$=\dfrac{1}{30^2}\left(25+25+16+50\cdot\dfrac{1}{2}+40\cdot\dfrac{1}{2}+40\cdot\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{131}{30^2}$

したがって　$|\overrightarrow{\mathrm{OG}}|=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{131}}{30}}$

3

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(1,\ 1,\ 1)$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(2,\ 1,\ 3)$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=(-5,\ -2,\ x-2)$ に対し

$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$　となる実数 s，t が存在する．

よって　$(-5,\ -2,\ x-2)=s(1,\ 1,\ 1)+t(2,\ 1,\ 3)$

$-5=s+2t$　……①　　$-2=s+t$　……②

$x-2=s+3t$　……③

①，②より　$s=1$，$t=-3$

このとき③より　$\boldsymbol{x=-6}$

「共面条件」の基本である．
平面，空間ベクトル問わず，同一直線上にない 3 点 A，B，C は 1 つの平面上にある（これを平面 ABC という）．
さらにもう 1 点 P がその平面上にあるかについては，平面ベクトルにおいては当たり前であり，
$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$
を満たす実数 s，t が「必ず存在する」．
空間においてはその限りではない．よって実数 s，t が存在すれば，点 P は平面 ABC 上にある．存在しなければ平面 ABC 上にはない．

©RECRUIT HOLDINGS

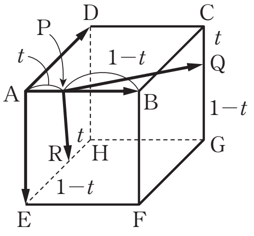
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第45講　空間ベクトル(2)

1　1辺の長さが1の立方体ABCD-EFGHにおいて，辺AB，CG，HEを $t:(1-t)$ に内分する点をそれぞれP，Q，Rとし，$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AE}=\vec{c}$ とする．ただし，$0<t<1$ とする．

(1)　$\overrightarrow{PQ}$，$\overrightarrow{PR}$ をそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．

(2)　$\overrightarrow{PQ}$ と $\overrightarrow{PR}$ のなす角 θ を求めよ．



(1)　$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{AQ}-\overrightarrow{AP}=\{(1-t)\overrightarrow{AC}+t\overrightarrow{AG}\}-t\overrightarrow{AB}$

$=(1-t)(\vec{a}+\vec{b})+t(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})-t\vec{a}=\boldsymbol{(1-t)\vec{a}+\vec{b}+t\vec{c}}$

$\overrightarrow{PR}=\overrightarrow{AR}-\overrightarrow{AP}=\{\overrightarrow{AE}+(1-t)\overrightarrow{EH}\}-t\overrightarrow{AB}$

$=\vec{c}+(1-t)\vec{b}-t\vec{a}=\boldsymbol{-t\vec{a}+(1-t)\vec{b}+\vec{c}}$

(2)　$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=0$　より

$|\overrightarrow{PQ}|^2=|(1-t)\vec{a}+\vec{b}+t\vec{c}|^2=(1-t)^2+1+t^2=2t^2-2t+2$

$|\overrightarrow{PR}|^2=|-t\vec{a}+(1-t)\vec{b}+\vec{c}|^2=t^2+(1-t)^2+1=2t^2-2t+2$

$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PR}=\{(1-t)\vec{a}+\vec{b}+t\vec{c}\}\cdot\{-t\vec{a}+(1-t)\vec{b}+\vec{c}\}$

$=(1-t)\times(-t)+1\times(1-t)+t\times1=t^2-t+1$

よって　$\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PR}}{|\overrightarrow{PQ}||\overrightarrow{PR}|}=\dfrac{t^2-t+1}{\sqrt{2t^2-2t+2}\sqrt{2t^2-2t+2}}=\dfrac{t^2-t+1}{2(t^2-t+1)}=\dfrac{1}{2}$

$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$　より　$\theta=\boldsymbol{60^\circ}$

2　[1]　3点A$(-1,\ -1,\ -1)$，B$(1,\ 2,\ 3)$，C$(x,\ y,\ 1)$が一直線上にあるとき，x，y の値を求めよ．

3点A，B，Cが一直線上にあるとき

$\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}$　となる実数 k が存在する．

$\overrightarrow{AC}=(x+1,\ y+1,\ 2)$，$\overrightarrow{AB}=(2,\ 3,\ 4)$　より

$(x+1,\ y+1,\ 2)=k(2,\ 3,\ 4)=(2k,\ 3k,\ 4k)$

よって，$x+1=2k$　……①　　$y+1=3k$　……②　　$2=4k$　……③

③より　$k=\dfrac{1}{2}$　　よって①，②より　$x=\boldsymbol{0}$，$y=\boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$

2　[2]　正四面体ABCDにおいて，△BCDの重心をGとする．ある実数 k について，$k\overrightarrow{PA}=\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}$ を満たす点Pは，2点A，Gを通る直線上にあることを証明せよ．

$\overrightarrow{AG}=\dfrac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD})$　……①

また，$k\overrightarrow{PA}=\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}$　より

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

$-k\overrightarrow{AP}=(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AP})+(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AP})+(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AP})$

$(3-k)\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}$　……②

$k=3$ のとき　$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=\vec{0}$　つまり　①から $\overrightarrow{AG}=\vec{0}$　より　不適.

よって　$k\neq3$　このとき　②より　$\overrightarrow{AP}=\dfrac{1}{3-k}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD})$　……③

①, ③より　$\overrightarrow{AP}=\dfrac{3}{3-k}\overrightarrow{AG}$　より　3点A, G, Pは一直線上にある.

したがって, 点Pは2点A, Gを通る直線上にある.

3　直方体ABCD-EFGHにおいて, 辺BFを2：1に内分する点をP, 辺FGを $t:(1-t)$ に内分する点をQ, 辺DHの中点をRとする. 4点A, P, Q, Rが同一平面上にあるとき, 実数 t の値を求めよ.

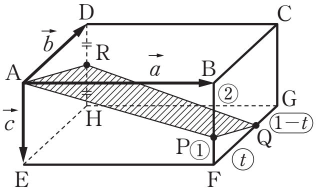
$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AE}=\vec{c}$ とする.

点Qが平面APR上にあるとき, 実数 α, β を用いて

$\overrightarrow{AQ}=\alpha\overrightarrow{AP}+\beta\overrightarrow{AR}$

$=\alpha\left(\vec{a}+\dfrac{2}{3}\vec{c}\right)+\beta\left(\vec{b}+\dfrac{1}{2}\vec{c}\right)$

$=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\left(\dfrac{2}{3}\alpha+\dfrac{1}{2}\beta\right)\vec{c}$　……①　と表される.



また, 点Qは辺FG上より

$\overrightarrow{AQ}=(1-t)\overrightarrow{AF}+t\overrightarrow{AG}$

$=\overrightarrow{AF}+t\overrightarrow{FG}=\vec{a}+\vec{c}+t\vec{b}$　……②　と表される.

$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ は1次独立より　①, ②から　$\alpha=1$, $\beta=t$, $\dfrac{2}{3}\alpha+\dfrac{1}{2}\beta=1$

したがって　$\alpha=1$, $\beta=\dfrac{2}{3}$　　ゆえに　$t=\boldsymbol{\dfrac{2}{3}}$

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 45 講　空間ベクトル(2)

四面体 ABCD の辺 BC の中点を P，線分 PD の中点を Q，線分 AQ の中点を R とする．また，直線 BR と平面 ACD の交点を S とし，$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{c}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{d}$ とする．

(1)　$\overrightarrow{AR}=\dfrac{1}{\boxed{ア}}(\vec{b}+\vec{c}+\boxed{イ}\vec{d})$　である．

(2)　点 S は直線 BR 上にあるので，$\overrightarrow{BS}=k\overrightarrow{BR}$（$k$ は実数）とおくと，

$$\overrightarrow{AS}=\left(1-\frac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}k\right)\vec{b}+\frac{k}{\boxed{オ}}\vec{c}+\frac{k}{\boxed{カ}}\vec{d}\quad \cdots\cdots①$$ と表せる．

また，点 S は平面 ACD 上にあるので，$\overrightarrow{AS}=s\vec{c}+t\vec{d}$（$s$，$t$ は実数）　……②　とおける．

①，②より　$\overrightarrow{AS}=\dfrac{\boxed{キ}}{\boxed{ク}}\vec{c}+\dfrac{\boxed{ケ}}{\boxed{コ}}\vec{d}$ である．

(1)　$\overrightarrow{AP}=\dfrac{\vec{b}+\vec{c}}{2}$，$\overrightarrow{AQ}=\dfrac{\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AD}}{2}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\vec{b}+\vec{c}}{2}+\vec{d}\right)=\dfrac{\vec{b}+\vec{c}+2\vec{d}}{4}$　より

$$\overrightarrow{AR}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AQ}=\frac{1}{2}\times\frac{\vec{b}+\vec{c}+2\vec{d}}{4}=\frac{1}{\mathbf{8}}(\vec{b}+\vec{c}+\mathbf{2}\vec{d})$$

(2)　点 S は直線 BR 上にあるので，$\overrightarrow{BS}=k\overrightarrow{BR}$（$k$ は実数）とおくと，

$$\overrightarrow{AS}-\overrightarrow{AB}=k(\overrightarrow{AR}-\overrightarrow{AB})$$

$$\overrightarrow{AS}=(1-k)\overrightarrow{AB}+k\overrightarrow{AR}$$

$$=(1-k)\vec{b}+k\left(\frac{\vec{b}+\vec{c}+2\vec{d}}{8}\right)=\left(1-\frac{\mathbf{7}}{\mathbf{8}}k\right)\vec{b}+\frac{k}{\mathbf{8}}\vec{c}+\frac{k}{\mathbf{4}}\vec{d}\quad\cdots\cdots①$$

また，点 S は平面 ACD 上にあるので，$\overrightarrow{AS}=s\vec{c}+t\vec{d}$　（s，t は実数）　……②　とおける．

$\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$ は 1 次独立より，①，②から

$1-\dfrac{7}{8}k=0$，　$\dfrac{k}{8}=s$，　$\dfrac{k}{4}=t$　　　よって　$k=\dfrac{8}{7}$，$s=\dfrac{1}{7}$，$t=\dfrac{2}{7}$

したがって　$\overrightarrow{AS}=\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{7}}\vec{c}+\dfrac{\mathbf{2}}{\mathbf{7}}\vec{d}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。